2006/5/17, NM, HN

数値計算演習問題：擬似乱数と乱歩

物理現象をシミュレーションしたり、数式を数値的に評価するのに、乱数を用いると便利なことがある。そのような方法は一般にモンテカルロ法と呼ばれている。

乱数とは、文字通り「乱れた数」で、統計的にはある分布にしたがっているがその出現順序には規則性なく、毎回次に何がでてくるか分からないような数字の列である。

計算機はある決まった規則にしたがってしか計算ができないので、定義通りの乱数を発生させることはできない。しかし、実際上乱数に見えるような数列を発生させることはでき、それを「擬似乱数」という。

この演習では、最初にある範囲で一様に分布する擬似乱数をつくって、それが実際、乱数らしく見えるか確かめてみる。その後に、それを使って乱歩（ランダムウォーク）のシミュレーションをしてみる。

1 擬似乱数

1. 適当な数値計算法の文献で、0 から 1 までの間の一様乱数を発生するアルゴリズムをいくつか調べよ。

2. その中から適当なものを選んで、プログラムを書け。

3. そのプログラムが実際に「乱数」を発生しているか、以下の手順で調べよ。

   (a) プログラムを走らせてみて、生成される最初の 10 個の乱数を書き出してみよ。プログラムの「初期条件（乱数の種）」を変えてみて、その数列がどうなるか確かめよ。

   (b) **分布：**乱数を多数生成し、以下のようにその値の頻度分布を調べよ。
   区間を適当に区切ってヒストグラムを書いてみよ。乱数の種を適当に変えて、頻度分布が変化するか確かめよ。

   (c) **相関：**引続き生成される乱数に相関がないか、以下のように確かめよ。
   多数の乱数を生成し、n 番目に生成された乱数を r_n として、2 次元平面上の (r_n, r_{n+1}) に点をプロットし、その分布を見よ。乱数の種を適当に変えて、それが変化するか調べよ。

4. 区間 $[0, 1)$ の一様乱数発生プログラムを用いて、ガウス分布をする乱数を生成するプログラムを書け。生成された乱数が確かにガウス分布しているか確かめよ。

2　乱歩（酔歩、ランダムウォーク）

一定の時間毎にランダムな方向に進むような運動を乱歩（酔歩、ランダムウォーク）という。以下では、上で作った乱数発生プログラムを用いて、１次元格子点上のランダムウォークのシミュレーションを行ない、その性質を調べてみる。その後に、それを２次元あるいは３次元に拡張する。

1. **１次元ランダムウォーク：**時刻 0 で原点にいた粒子が、時間１毎に、1/2 の確率で右へ 1、1/2 の確率で左へ 1 だけ進むような運動を考える。

   (a) 時刻 t での粒子の位置 x として、粒子の運動をシミュレーションするプログラムを作成せよ。

   (b) 粒子の軌跡 $x(t)$ をグラフに表示し、振る舞いを確認せよ。乱数の種を変えて、いくつかの軌跡を描いてみよ。

   (c) 複数回の試行の平均をとり、時刻 t での位置の平均 $< x(t) >$ と分散 $< (x(t) - < x(t) >)^2 >$ を計算せよ。それぞれ時間に対してどのように振舞うか確かめよ。それらの振舞の様子は理解できるか？

   (d) **再帰時間：**原点を出発した粒子が、最初に原点に戻ってくるまでの時間を再帰時間と呼ぶ。再帰時間の分布を以下の手順で求める。

      i. 何度も続けてシミュレーションを行ない、試行毎の再帰時間 τ を次々と出力するプログラムを書け。

      ii. 再帰時間の分布を求めよ。

      iii. 再帰時間 τ が大きいところでの分布の漸近形は、試行回数を大きくしても統計性が悪く精度良く調べにくい。
      そこで、再帰時間が τ よりも大きくなる確率 $P(\tau)$ をもとめ、それをプロットしてみよ。

      iv. 分布の τ の大きなところでの漸近形はどうなっているか？
      再帰時間の平均 $< \tau >$ はどうなるか？

2. **高次元のランダムウォーク：**２次元正方格子、および３次元立方格子で同様の計算を行なってみよ。

   １次元格子の場合と何か異なるか？